COMPARACIÓN DE INFINITOS (cálculo de límites)

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, diremos que la función f es un infinito.

- Sean f y g dos infinitos, al compararlos se distinguen cuatro casos:

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, se dice que f es un infinito de orden superior a g (alcanza el infinito más rápidamente).
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, se dice que f es un infinito de orden inferior a g.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0,\ l \in R$, se dice que f y g son del mismo orden.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe, se dice que f y g no son comparables.

- Dadas dos funciones potenciales, si tienen mismo exponente, son del mismo orden, en caso contrario, la de mayor exponente es de orden superior:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5}{3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{3} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{3} = +\infty$

- Dadas dos funciones exponenciales de base mayor que uno, la de mayor base es un infinito de orden superior:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{6 \cdot 2^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{6} = +\infty$

- Cualquier función exponencial es un infinito de orden superior a cualquier función potencial:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5}{2^x} = 0$

x	2^x	x^5
100	$1{,}27 \cdot 10^{30}$	10^{10}
1000	$1{,}1 \cdot 10^{301}$	10^{15}

- Cualquier función potencial es un infinito de orden superior a cualquier función logarítmica de base mayor que uno:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\log_2 x} = +\infty$

x	$\log_2 x$
1000	9,9
1000000	16,6

Todas las funciones logarítmicas de base mayor que uno son infinitos de mismo orden:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log_2 x}{\log_8 x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\log x}{\log 2}}{\frac{\log x}{\log 8}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log 8}{\log 2}$ número real distinto de 0

- En resumen:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x < \ldots \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{4}} < \ldots < \lim_{x \to +\infty} x^6 < \ldots < \lim_{\substack{x \to +\infty \\ a > 1}} a^x < \lim_{x \to +\infty} x^x$$

- El orden de la suma de varios infinitos es el del sumando de mayor orden:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^3 - 7x} - \sqrt{x^2 + 2x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - 7x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} = +\infty$

NOTA: Los límites cuando x tiende a menos infinito conviene convertirlos en límites con x tendiendo a más infinito,